ΘΕΩΡΗΜΑ (ΚΡΙΤΗΡΙΟ CAUCHY)

Η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,m \geq n_0): \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in E: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$(\Rightarrow)$: Έστω $f_n \xrightarrow{u} f$ και έστω $\varepsilon>0$

$\Rightarrow \exists n_0 (\forall n \geq n_0)(\forall x \in E): |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 (\forall n,m \geq n_0)(\forall x \in E): |f_n(x) - f_m(x)| \leq$

$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$(\Leftarrow)$: Έστω $x_0 \in E \Rightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall n,m \geq n_0)$:

$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$

$\exists f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) \Rightarrow$ ορίζεται $f: E \to \mathbb{R}$ με

$f_n \to f$ κατά σημείο

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in E)$:

$(\forall m \geq n_0)$: $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Λέμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n: E \to \mathbb{R}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f: E \to \mathbb{R}$ εάν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κριτήριο Weirstrass)

Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ και $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M \geq 0$ ώστε

$\|f_n\|_\infty \leq M_n \Rightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x)| \leq M_n$

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f

---

Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$, $f_n \xrightarrow{u} f$ και $f : E \to \mathbb{R}$

Έστω x ένα σ.σ. του E (πχ $E = [a, \beta)$ το $x = \beta$)

Έστω $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t \to x} f_n(t) = a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n \xrightarrow{n \to \infty} \lim_{t \to x} f(t) \in \mathbb{R} \\ \left(\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty}\left(\lim_{t \to x} f_n(t)\right) = \lim_{t \to x}\left(\lim_{n \to \infty} f_n(t)\right)\right) \end{array}\right\} (*)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (SOS)

1) ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ & ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ:

$$\int_a^\beta \underbrace{f(x)}_{\lim_{n \to \infty} f_n(x)} dx = \lim_{n \to \infty} \int_x^\beta f_n(x) dx$$

2) ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ & ΣΥΝΕΧΕΙΑ:

$f_n \xrightarrow{u} f$, f_n συνεχείς $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ συνεχής

(πόρισμα της (*))

3) ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ & ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ:

$f_n \to f$ κατά σημείο, f_n διαφορίσιμες

και $f_n' \to g$ ομοιόμορφα $\Rightarrow f_n \to f$ ομοιόμορφα

και $f'(=g) = \lim_{n \to \infty} f_n'$

$\lim_{n \to \infty} f_n' = \left(\lim_{n \to \infty} f_n\right)'$

Να εξετασθούν ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση

Ⓐ $f_n(x) = x^n \quad , \forall x \in [-1,1]$

Εξετάζω πρώτα εάν συγκλίνει κατά σημείο

$f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0 & , x \in (-1,1) \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$ δεν έχουμε σύγκλιση

Ⓑ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \Rightarrow f_n(x) = \frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0 \ , x \in \mathbb{R}$

Άρα, έχω σύγκλιση κατά σημείο

Αλλά $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|^n}{n!} = \infty$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Ⓒ $f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \ , x \in (0,1)$

Κατά σημείο:

$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (κράτω ένα σημείο σταθ., δεν σταθεροποιώ τα x και τρέχω το $n\to\infty$)

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ:

$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in(0,1)} \frac{x}{1+nx} \ , \ f_n'(x) > 0 \Rightarrow \|f\|_\infty = \frac{1}{1+n}$

$\Rightarrow \|f\|_\infty \to 0$

Άρα, συγκλίνει ομοιόμορφα

Ⓓ $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \ , x \in [-1,1]$

κατά σημείο συγκλίνει στο 0

$f_n(x) \to 0 \ , x \in [-1,1]$

και ομοιόμορφα

$\max_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

συγκλίνει ομοιόμορφα

ε) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{1+nx}\right)$, $x \geq 0$

<u>κατα σημειο</u>: $f_n(x) \to 0$, $\forall x \geq 0$

<u>ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ</u>: $\|f\|_\infty = \sup_{x\geq 0} \left|\sin\left(\frac{x}{1+xn}\right)\right|$

Εστω $g(x) = \frac{x}{1+nx} > 0$, $x > 0$

τοτε $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n}$

άρα $\|f\|_\infty = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ συγκλίνει ομοιομορφα

στ) ΝΔΟ η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ με $f_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και τυπο $f_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$ συγκλίνει ομοιομορφα σε μια συνεχή συναρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Ψαχνω $M_n, n \in \mathbb{N}$ με $\|f_n(x)\| \leq M_n$, $\forall x \geq 0$

ετσι ωστε $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ (κρ. Weirstrass)

(Βλεπουμε οτι πχ $M_n = \frac{1}{n^2}$ ως $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$, $x \geq 0$)

Αφου $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ είναι $\forall n \in \mathbb{N}$ συνεχεις

και μαλιστα $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow{u} f \overset{①}{\Longrightarrow} f(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής. Επισης, αφου $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιομ. στο $(0,+\infty)$ θα συγκλίνει ομοιομ. στο $[0,1]$

και αρα $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx =$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} f_n(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$